



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 14 martie 2015

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VIII-a

Problema 1. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, arătați că are loc inegalitatea:

$$\sqrt{\frac{a}{-a+b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a-b+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \geq 3.$$

Soluție

Deoarece a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, numerele $-a+b+c$, $a-b+c$ și $a+b-c$ sunt strict pozitive. Aplicând inegalitatea dintre media geometrică și media armonică avem

$$\sqrt{\frac{a}{-a+b+c}} = \sqrt{1 \cdot \frac{a}{-a+b+c}} \geq \frac{2}{1 + \frac{a}{-a+b+c}} = \frac{2a}{b+c}$$

și analoagele **3p**

Este suficient să demonstrăm că $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Notând $b+c = x$, $a+c = y$, $b+c = z$, obținem $a = \frac{-x+y+z}{2}$, $b = \frac{x-y+z}{2}$ și $c = \frac{x+y-z}{2}$, iar inegalitatea de demonstrat se scrie echivalent:

$$\frac{-x+y+z}{2x} + \frac{x-y+z}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1 + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1 \geq 3$$

care este adevărată, deoarece $u + \frac{1}{u} \geq 2$, pentru orice $u > 0$ **4p**

Problema 2. Pentru orice număr natural a definim mulțimea

$$A_a = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n^2 + an} \in \mathbb{N} \right\}.$$

a) Arătați că mulțimea A_a este finită dacă și numai dacă $a \neq 0$.

b) Determinați cel mai mare element al mulțimii A_{40} .

Gazeta Matematică

Soluție

a) Dacă $a = 0$ atunci $A = \mathbb{N}$, care este infinită **1p**

Dacă $a \neq 0$ atunci există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $n^2 + an = p^2$ **1p**

Obținem $4n^2 + 4an + a^2 = 4p^2 + a^2$, de unde $(2n+a-2p)(2n+a+2p) = a^2$ **1p**

Ca urmare, $2n+a+2p$ este divizor al lui a^2 (care este nenul), deci $2n < 2n+a+2p \leq a^2$, de unde rezultă că n poate lua un număr finit de valori, adică A este finită **2p**

b) Trebuie să găsim cel mai mare număr natural n pentru care $n^2 + 40n$ este pătrat perfect. Fie $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $p^2 = n^2 + 40n$.

Obținem $p^2 + 400 = (n+20)^2$, de unde $(n+20-p)(n+20+p) = 400$. Numerele $p-n-20$ și $p+n+20$ au aceeași paritate, deci vor fi pare. Avem $2 \cdot 200 = 4 \cdot 100 = 8 \cdot 50 = 400$, de unde $n \in \{81, 32, 9\}$. Elementul căutat este 81. **2p**

Problema 3. Determinați numărul de elemente ale mulțimii

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2016}} \right\}.$$

Soluție Fie $(x, y) \in M$. Cum $\sqrt{2016} = 12\sqrt{14}$, avem

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{12\sqrt{14}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{14x}} - \frac{1}{\sqrt{14y}} = \frac{1}{2016} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{14x}} = \frac{1}{\sqrt{14y}} + \frac{1}{2016}.$$

Prin ridicare la pătrat obținem $\frac{1}{14x} = \frac{1}{14y} + \frac{1}{2016} + \frac{1}{1008\sqrt{14y}}$, de unde $\sqrt{14y} \in \mathbb{Q}$ și, ca urmare $\sqrt{14x} \in \mathbb{Q}$.

Atunci există numerele naturale nenule a, b pentru care $x = 14a$ și $y = 14b$ **3p**

Înlocuind în relația $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{12\sqrt{14}}$, obținem $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{12}$, de unde $a = \frac{12b}{b+12}$ **2p**

Din $\frac{12b}{b+12} \in \mathbb{N}$ rezultă $b+12 \mid 144$, deci $b \in \{4, 6, 12, 24, 36, 60, 132\}$, de unde $a \in \{3, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$.

În concluzie, mulțimea M admite 7 elemente. **2p**

Problema 4. Fie $ABCD A' B' C' D'$ un paralelipiped dreptunghic și $AB' \cap A'B = \{O\}$. Pe muchia $[BC]$ se consideră un punct N astfel încât $A'C \parallel (B'AN)$. Știind că $D'O \perp (B'AN)$ demonstrați că $ABCD A' B' C' D'$ este cub.

Soluție

Din $D'A' \perp (ABB')$ și $D'O \perp AB'$ obținem $A'O \perp AB'$, deci $ABB'A'$ este pătrat. **2p**

Apoi $A'C \parallel (ANB')$ și $(ANB') \cap (A'BC) = ON$, deci $A'C \parallel ON$. Cum O este mijlocul segmentului $[A'B]$ atunci N este mijlocul segmentului $[BC]$ **1p**

În dreptunghiul $A'BCD'$, avem $m(\sphericalangle D'ON) = 90^\circ$, de unde $\triangle D'A'O \sim \triangle OBN$. Atunci $\frac{D'A'}{A'O} = \frac{OB}{ON}$, ceea ce conduce la $\frac{A'B^2}{4} = \frac{A'D'^2}{2}$, deci $A'B = A'D'\sqrt{2}$. Obținem $A'D = A'A$, deci $AA'D'D$ este pătrat. **3p**

Concluzia se obține remarcând că $ABCD A' B' C' D'$ este un paralelipiped dreptunghic cu toate fețele laterale pătrate, deci este cub. **1p**